

第五章 雙變量隨機變數

授課教師：樞清全

國立暨南國際大學經濟學系

第五章 雙變量隨機變數

※ 探討兩個隨機變數 X, Y 的聯合行為。

第 5.1 節 離散隨機變數的聯合分配

A r.v. X : 實現值 x_1, x_2, x_3, \dots

A r.v. Y : 實現值 y_1, y_2, y_3, \dots

則 X 與 Y 的聯合 (joint) 機率為

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Notes :

(A) 聯合機率函數的性質 :

1. $f_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots \quad ; \quad j = 1, 2, \dots$
2. $\sum_{\substack{i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots}} f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1 \quad (\text{or} \quad \sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1)$

(B) 比較單一隨機變數 X

1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$
2. $\sum_x f_X(x) = 1$

Ex 5.1 $X = 1, 2, 3$ 分別表示低、一般與高所得顧客。以 $Y = 1, 2, 3, 4$ 分別表示共同基金，債券，股票與 options 金融商品。

X 、 Y 的聯合機率如下：

y x	1	2	3	4
1	0.1	0	0	0
2	0.2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1	0.2

(A) $f_{X,Y}(3,1) = P(X = 3, Y = 1) = 0.1$ 表示高所得顧客且會買 mutual fund 的機率為 0.1。

(B) $f_{X,Y}(1,4) = P(X=1, Y=4) = 0$ 表示低所得者不會以高風險之 options 為投資工具。

$$(C) \sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$$

由此 joint probability function，可以計算各種 event 的機率。

$$\begin{aligned} \text{ex. } P(X \leq 2, Y \leq 2) &= f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(2,2) \\ &= 0.1 + 0 + 0.2 + 0.1 = 0.4 \end{aligned}$$

$$\text{ex. } P(X = 3, 2 \leq Y \leq 3) = f_{X,Y}(3,2) + f_{X,Y}(3,3) = 0 + 0.1 = 0.1$$

雙變量累積分配函數 (bivariate cumulative distribution function)

定義如下：

$$\forall x, y \in \mathfrak{R} \quad F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$= \sum_{t \leq x} \sum_{s \leq y} P(X = t, Y = s)$$

$$= \sum_{t \leq x} \sum_{s \leq y} f_{X,Y}(t, s)$$

Notes :

1. $F_{X,Y}(x, y)$ 是 x or y 的非遞減函數。

2. $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$

3. $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

4. 與單變量 $F_X(x)$ 定義比較: $\forall x \in \mathfrak{R} \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)$

Ex 5.2 From Ex 5.1

$$\left. \begin{aligned} F_{X,Y}(2,2) &= P(X \leq 2, Y \leq 2) = 0.4 \\ F_{X,Y}(2,3) &= P(X \leq 2, Y \leq 3) = 0.6 \end{aligned} \right\} \textit{nondecreasing in } y$$

$$\left. \begin{aligned} F_{X,Y}(2,3) &= P(X \leq 2, Y \leq 3) = 0.6 \\ F_{X,Y}(3,3) &= P(X \leq 3, Y \leq 3) = 0.8 \end{aligned} \right\} \textit{nondecreasing in } x$$