第五章 雙變量隨機變數

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 5.9 節 延伸：多變量隨機變數

n 個 *r.v.*s $X_1, X_2, \cdots X_n$

以 $f_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示機率函數

以 $F_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示累積分配函數，定義如下：

$$F_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots X_n \le x_n)$$

$$= \sum_{s_1 \le x_1} \sum_{s_2 \le x_2} \cdots \sum_{s_n \le x_n} f_{X_1, X_2, \cdots X_n}(s_1, s_2, \cdots s_n)$$

若$X_1, X_2, \cdots X_n$之間互相獨立，則

$$f_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \forall\, x_1, x_2, \cdots x_n$$

定理 5.31: $X_1, X_2, \cdots X_n$ $r.v.$s. $a_1, a_2, \cdots a_n \in \Re$ 則

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) \cdots + a_n E(X_n);$$

or $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$

定理 5.32: $X_1, X_2, \cdots X_n$ r.v.s $a_1, a_2, \cdots a_n \in \Re$ 則

$$Var(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n) = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) \cdots$$
$$+ a_n^2 Var(X_n) + 2\sum_{i \neq j}\sum Cov(X_i, X_j)$$

or $Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Cov(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \quad \forall i \neq j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j).$$

$$If \;\; Cov\left(X_i, X_j\right) = 0, \;\; \forall i \neq j \;\; \Rightarrow \;\; Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} Var\left(X_i\right)$$