第五章 雙變量隨機變數

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 5.8 節 條件動差

5.8.1 條件均數

X,Y discrete (continuous) *r.v.*s 給定$Y = y$,

$$E\left(X\middle|Y=y\right)=\sum_{x} x f_{X|Y}\left(x\middle|y\right)$$

$$E\left(X\middle|Y=y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}\left(x\middle|Y=y\right)dx$$

i.e. X 可能值的加權平均，weight 為條件機率。

Note： $E(X|Y)$並非常數；給定不同 $\{Y=y\}$, $E(X|Y)$有不同的值.

$\therefore E(X|Y)$為 Y 的隨機函數。

Ex 5.24 在 Ex 5.22 中

$$f_{X|Y}(1|Y=1)=\tfrac{1}{4}$$

$$f_{X|Y}(2|Y=1)=\tfrac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(3|Y=1)=\tfrac{1}{4}$$

$$\therefore\ E(X|Y=1)=\sum_x x f_{X|Y}(X|Y=1)=1\cdot\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{2}+3\cdot\tfrac{1}{4}=2$$

已知 $Y=2$ 的條件下，

$$f_{X|Y}(1|Y=2)=\tfrac{0}{0.1}=0$$

$$f_{X|Y}(2|Y=2)=\tfrac{0.1}{0.1}=1$$

$$f_{X|Y}(3|Y=2)=\tfrac{0}{0.1}=0$$

$$\therefore \quad E(X|Y=2)=\sum_{x} x f_{X|Y}(X|2)=1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0=2$$

已知 $Y=3$ 的條件下，

$$f_{X|Y}(1|Y=3)=\tfrac{0}{0.3}=0$$

$$f_{X|Y}(2|Y=3)=\tfrac{0.2}{0.3}=\tfrac{2}{3}$$

$$f_{X|Y}(3|Y=3)=\tfrac{0.1}{0.3}=\tfrac{1}{3}$$

$$\therefore \quad E(X|Y=3)=\sum_{x} x f_{X|Y}(X|3)=1\cdot 0+2\cdot\tfrac{2}{3}+3\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{7}{3}$$

已知 $Y=4$ 的條件下，

$$f_{X|Y}(1|Y=4)=\frac{0}{0.2}=0$$

$$f_{X|Y}(2|Y=4)=\frac{0}{0.2}=0$$

$$f_{X|Y}(3|Y=4)=1$$

$\therefore$ $E(X|Y=4)=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1=3$

$\therefore$ 隨著 Y 的值不同，$E(X|Y)$就不同.

$$E(X|Y)=\begin{cases} 2 & \text{if } Y=1 \quad P(Y=1)=0.4 \\ 2 & \text{if } Y=2 \quad P(Y=2)=0.1 \\ \frac{7}{3} & \text{if } Y=3 \quad P(Y=3)=0.3 \\ 3 & \text{if } Y=4 \quad P(Y=4)=0.2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(E(X|Y))=2\times 0.4+2\times 0.1+\tfrac{7}{3}\times 0.3+3\times 0.2=2.3$$

***Note*：** $E(X)=2.3$

比例說明： $E(E(X|Y))=E(X)$

稱為重複期望值定律 (law of interated expectations)

定理 5.26 X,Y *r.v.*s. 則 $E\left(XY|Y\right)=YE\left(X|Y\right)$

而對 Y 任意 Y 的函數$\phi\left(Y\right)$, $E\left(X\phi\left(Y\right)|Y\right)=\phi\left(Y\right)E\left(X|Y\right)$

定理 5.27 X,Y *r.v.*s. 則

$$E\left(aX+b|Y\right)=E\left(aX|Y\right)+E\left(b|Y\right)$$

$$=aE\left(X|Y\right)+bE\left(1|Y\right)$$

$$=aE\left(X|Y\right)+b$$

定義　$\phi(Y)$ 相對於 X 的均方誤 (mean square errors ,MSE)為：

$MSE = E(X-\phi(Y))^2$，表示 X 與 $\phi(Y)$ 的距離。

定理 5.28　X,Y　*r.v.s.* $\phi(Y)$ 為 Y 的函數.則

$$E\left[(X-E(X|Y))^2\right] \le E\left[(X-\phi(Y))^2\right]$$

而且 $E\left[(X-E(X|Y))\phi(Y)\right]=0$

Proof：

$$E\left(X-\phi(Y)\right)^2 = E\left(X-E\left(X\middle|Y\right)+E\left(X\middle|Y\right)-\phi(Y)\right)^2$$

$$= E\left[\left(X-E\left(X\middle|Y\right)\right)^2+\left(E\left(X\middle|Y\right)-\phi(Y)\right)^2+2\left(X-E\left(X\middle|Y\right)\right)\left(E\left(X\middle|Y\right)-\phi(Y)\right)\right]$$

$$= E\left(X-E\left(X\middle|Y\right)\right)^2+E\left(E\left(X\middle|Y\right)-\varphi(Y)\right)^2$$

$$+2E\left[\left(X-E\left(X\middle|Y\right)\right)\left(E\left(X\middle|Y\right)-\varphi(Y)\right)\right]$$

$$\because \quad E\left[\left(X - E(X|Y)\right)\left(E(X|Y) - \phi(Y)\right)\right]$$

$$= E\left[\left(X - E(X|Y)\right)\left(E(X|Y)\right)\right] - E\left[\left(X - E(X|Y)\right)\phi(Y)\right]$$

令 $Z = \left(X - E(X|Y)\right)\left(E(X|Y)\right)$

$$\because \quad E(Z) = E\left[E(Z|Y)\right] = E\left[E\left[X - E(X|Y)\right)\left(E(X|Y)\right)\right]\Big|Y\right]$$

$$= E\left[E(X|Y)\cdot E\left[X - E(X|Y)\right]\Big|Y\right]$$

$$= E\left[E(X|Y)\cdot\left(E(X|Y) - E(X|Y)\right)\right] = 0$$

同理，$E\left[X-E(X|Y)\phi(Y)\right]=E(Z)=E(Z|Y)$

$$=EE\left(\left(X-E(X|Y)\right)\phi(Y)\middle|Y\right)$$

$$=E\phi(Y)\cdot E\left(X-E(X|Y)\middle|Y\right)$$

$$=E\phi(Y)\cdot\left(E(X|Y)-EE(X|Y)\middle|Y\right)=0$$

$$\therefore\ E\left(X-\varphi(Y)\right)^2=E\left(X-E(X|Y)\right)^2+E\left(E(X|Y)-\varphi(Y)\right)^2$$

$$\therefore\ E\left(X-\phi(Y)\right)^2\geq E\left(X-E(X|Y)\right)^2$$

Note：定理 5.28 表示：$E(X|Y)$是所有 Y 的函數中使均方誤最小的函數。*i.e.*以 MSE 為標準，$E(X|Y)$是最接近 X 的一個 Y 的函數。

$\therefore$ $E(X|Y)$亦稱為給定的 info. set 之下,對 X 的最佳預測。

此時預測誤差$X-E(X|Y)$與 Y 的任何函數無關。

5.8.2 條件變異數

給定 *r.v.* Y 之下, X 的條件變異數為：

$$Var\left(X \mid Y\right) = E\left[\left(X - E\left(X \mid Y\right)\right)^2 \mid Y\right]$$

$$= E\left[X^2 - 2XE\left(X \mid Y\right) + E\left(X \mid Y\right)^2 \mid Y\right]$$

$$= E\left(X^2 \mid Y\right) - 2E\left(X \mid Y\right) \cdot E\left(X \mid Y\right) + E\left(X \mid Y\right)^2$$

$$= E\left(X^2 \mid Y\right) - \left(E\left(X \mid Y\right)\right)^2$$

定理 5.29 X,Y *r.v.*s $a, b \in \Re$,則 $Var(aX+b|Y) = a^2 Var(X|Y)$

定理 5.30 X,Y *r.v.*s, 則

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$$

***proof*：**

$$\because \ Var(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$$

$$\therefore \ E(Var(X|Y)) = EE(X^2|Y) - E\left[E(X|Y)^2\right]$$

$$= E\left(X^2\right) - E\left[E\left(X\middle|Y\right)^2\right]$$

$$Var\left(E\left(X\middle|Y\right)\right) = E\left(E\left(X\middle|Y\right)^2\right) - \left(EE\left(X\middle|Y\right)\right)^2$$

$$\left(\because Var(Z) = E\left(Z^2\right) - \left(E(Z)\right)^2\right)$$

$$= E\left[E\left(X\middle|Y\right)^2\right] - E\left(X\right)^2$$

$$\therefore E\left(Var\left(X\middle|Y\right)\right) + Var\left(E\left(X\middle|Y\right)\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - E\left[\left(E\left(X|Y\right)\right)^2\right] + E\left[\left(E\left(X|Y\right)\right)^2\right] - E\left(X\right)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = Var\left(X\right)$$

Notes：

1. 定理 5.30 表示： 任何一個 *r.v.*的變異數可以分解成兩個部分；一為條件變異數的期望值,另一為條件期望值的變異數。

2. 若 X 與 Y 獨立⇒條件機率函數等於非條件機率函數.

   i.e. $Var\left(X|Y\right) = Var\left(X\right) \Rightarrow E\left(Var\left(X|Y\right)\right) = E\left(Var\left(X\right)\right) = Var\left(X\right)$