第五章 雙變量隨機變數

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 5.7 節 條件分配 (conditional distribution)

X,Y 為 discrete *r.v.*s. 在已知$\{Y=y\}$事件發生條件下，$\{X=x\}$事件發生的條件機率為：該聯合機率佔邊際機率$P(\{Y=y\})$的比重。

i.e.：$P(X=x|Y=y)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

Check $\sum_x P(X = x | Y = y) = 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_x P(X = x | Y = y) = \sum_x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{f_Y(y)} \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) = 1$$

條件機率函數：$f_{X|Y}(x|Y = y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

Note：給定 y，$f_{X|Y}\left(x \middle| Y=y\right)$ 為 x 的函數.

i.e.：$\{X=x\}$ 發生機率會受到不同的 y 的影響。

同理， $f_{Y|X}\left(y \middle| X=x\right)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

Ex 5.22 在 Ex 5.3 中, 已知 $\{Y = y\}$ 發生之下, X 的條件機率為：

$$f_{X|Y}(x|Y=1) = P(\{X=x\}|\{Y=1\}) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)}$$

$$\therefore \quad f_{X|Y}(1|Y=1) = \tfrac{0.1}{0.4} = \tfrac{1}{4}$$

$$f_{X|Y}(2|Y=1) = \tfrac{0.2}{0.4} = \tfrac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(3|Y=1) = \tfrac{0.1}{0.4} = \tfrac{1}{4}$$

同理 $$f_{Y|X}(y|X=2)=\frac{f_{X,Y}(2,y)}{f_X(2)}$$

$$\therefore \quad f_{Y|X}(1|X=2)=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$$

$$f_{Y|X}(2|X=2)=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}$$

$$f_{Y|X}(3|X=2)=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$$

$$f_{Y|X}(4|X=2)=0$$

Note：若 X,Y 獨立, $f_{X|Y}(x|Y=y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f_X(x)\cdot f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$

$\because$ 若 X,Y 獨立 $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \forall\ x,y$

$\therefore \quad \Leftrightarrow \quad f_{X|Y}(x|Y=y)=f_X(x)$

亦即：若條件機率函數 = 邊際機率函數 $\forall\ (x,y)$

$\Leftrightarrow$ X,Y independent.

直覺：因為 X 與 Y 獨立，Y 發生與否不會影響 X $\therefore$ 條件機率與邊際機率相等。

若 X,Y 為 continuous *r.v.*s. 在$Y = y$的條件下，X 的條件機率密度函數 (conditional *pdf*)為

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

必須滿足：$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|Y = y)dx = 1$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|Y = y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}dx$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx = \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) = 1$$

由 conditional *pdf* 的定義：

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|Y=y) \cdot f_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|X=x) \cdot f_X(x)$$

若 X,Y 獨立 $\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall \; x,y$

$$\Leftrightarrow \quad f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x) \quad \forall \; x,y$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{Y|X}(y|X=x) = f_Y(y) \quad \forall \; x,y$$

Ex 5.23 由 Ex 5.18, Ex 5.19

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & , \quad 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f_{X|Y}(x|Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{8}(x+y)}{\frac{1}{4}(y+1)}=\frac{x+y}{2(y+1)} \qquad 0\le x\le 2$$

$$\therefore \quad f_{X|Y}(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{(x+y)}{2(y+1)} & , \quad 0\le x\le 2\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

同理， $f_{Y|X}(y|X=x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{x+y}{2(x+1)}\qquad 0\le y\le 2$

i.e. $f_{Y|X}(y|X=x)=\begin{cases}\frac{(x+y)}{2(x+1)} & , \quad 0\le y\le 2\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$

$\because\ f_{Y|X}(y|X=x)=\dfrac{x+y}{2(x+1)}\neq f_Y(y)=\frac{1}{4}(y+1)$

$\therefore$ X,Y dependent