第五章 雙變量隨機變數

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 5.3 節 離散隨機變數的動差

5.3.1 期望值與變異數

$$E(X)=\sum_x xf_X(x)=\sum_x x\sum_y f_{X,Y}(x,y)=\sum_x\sum_y xf_{X,Y}(x,y)$$

同理，

$$E(Y)=\sum_y yf_Y(y)=\sum_y y\sum_x f_{X,Y}(x,y)=\sum_y\sum_x yf_{X,Y}(x,y)$$

定理 5.5 Two *r.v's* X &Y, $a, b \in \Re$

$$\Rightarrow \quad E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$Proof: \quad E(aX+bY) = \sum_x \sum_y (ax+by) f_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y \left(ax f_{X,Y}(x,y) + by f_{X,Y}(x,y) \right)$$

$$= \sum_x \sum_y \left(ax f_{X,Y}(x,y) \right) + \sum_x \sum_y \left(by f_{X,Y}(x,y) \right)$$

$$= a \sum_x x \sum_y f_{X,Y}(x,y) + b \sum_y y \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

$$= a \sum_x x f_X(x) + b \sum_y y f_Y(y)$$

$$= aE(X) + bE(Y)$$

From 公式 4.8 (與單變量相同)

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

Ex. 5.6 From Ex 5.3

$$E(\mathrm{X}) = \sum_x x f_X(x) = 1(0.1) + 2(0.5) + 3(0.4) = 2.3$$

$$E(\mathrm{X}^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = 1^2(0.1) + 2^2(0.5) + 3^2(0.4) = 5.7$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5.7 - (2.3)^2 = 0.41$$

$$E(\mathrm{Y}) = \sum_y y f_Y(y) = 1(0.4) + 2(0.1) + 3(0.2) = 2.3$$

$$E(\mathrm{Y}^2) = \sum_y y^2 f_Y(y) = 1^2(0.4) + 2^2(0.1) + 3^2(0.2) = 6.7$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 6.7 - (2.3)^2 = 1.41$$

5.3.2 共變異數

給定 *r.v.s* X,Y.　X 與 Y 的交叉動差(cross moment)定義為

$$E(\mathrm{XY})=\sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(x,y)$$

***Notes*：**

1. 交叉動差會受到位置的影響

   i.e. $E(\mathrm{XY})\neq E[(X+c)Y]$

   $\because E[(X+c)Y]=E(XY+cY)=E(XY)+cE(Y)\neq E(XY)$

解決方法：先扣除母體均數再計算交叉動差。

此稱共變異數(covariance)。以 $Cov(X,Y)$ 表示

i.e. $Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

上式為衡量 mean 差距的共同變數。

If $Cov(X,Y)>0 \Rightarrow$ 表示平均而言，這些差距變動方向相同。

If $Cov(X,Y)<0 \Rightarrow$ 表示平均而言，這些差距變動方向相反。

2. $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$\because Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

3. $Cov(X,X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = Var(X)$

4. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

公式 5.7 $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$$= E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

定理 5.8　X, Y 為兩個隨機變數，$a,b,c,d\in\Re$. 則

$$Cov(aX+c,bY+d)=Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$$

proof：

1. $Cov(X,d)=E(Xd)-E(X)E(d)=dE(X)-dE(X)=0$

2. $Cov(aX,bY)=E((aX)(bY))-E(aX)E(bY)$

$$=abE(XY)-abE(X)E(Y)$$

$$=ab(E(XY)-E(X)E(Y))$$

$$=abCov(X,Y)$$

Ex 5.9 接 Ex 5.6 & Ex 5.3 求 $Cov(X,Y)=?$

$\Rightarrow$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(X)=2.3 \quad , \quad E(Y)=2.3$$

$$E(X\mathrm{Y})=\sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(x,y)=5.7$$

$$\therefore \quad Cov(X,Y)=5.7-2.3\times 2.3=0.41$$

令 $\tilde{Y}=Y+2 \Rightarrow E(\tilde{Y})=E(Y)+2=4.3$

$$Cov(X,\tilde{Y})=E(X\tilde{Y})-E(X)E(\tilde{Y})=E(X\tilde{Y})-(2.3)(4.3)=0.41$$

$$E(X\tilde{Y})=E(X(Y+2))=E(XY)+2E(X)=5.7+2(2.3)=10.3$$

$$\therefore E(XY) \neq E(X\tilde{Y})$$

但是$Cov(X,Y) = Cov(X,\tilde{Y}) = Cov(X,Y+2)$

$$Var(X+Y) = E\left[\left((X+Y) - E(X+Y)\right)^2\right] = E\left[\left(X+Y-E(X)-E(Y)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left\{(X-E(X)) + (Y-E(Y))\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{(X-E(X))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2\right\}\right]$$

$$= E\left[(X-E(X))^2\right] + 2[(X-E(X))(Y-E(Y))] + \mathrm{E}\left[(Y-E(Y))^2\right]$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$Var(X-Y)=Var(X+(-Y))=Var(X)+Var(-Y)+2Cov(X,-Y)$$

$$=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$$

定理 5.10 X 與 Y 為 *r.v.s.* $a,b\in\Re$, 則

$$Var(aX\pm bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)\pm 2abCov(X,Y)$$

若 $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow Var(aX\pm bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$

5.3.3 相關係數

相關係數(correlation coefficient)：衡量兩個隨機變數共同變動的指標。

(相關程度). 以$Corr(X,Y)$表示。

重要公式 5.11 X,Y 為兩個 *r.v.*s. 其變異數分別為σ_X^2 & σ_Y^2.

則 $$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

***Remark*：**

$$Corr(aX,bY)=\frac{Cov(aX,bY)}{\sqrt{Var(aX)}\cdot\sqrt{Var(bY)}}=\frac{abCov(X,Y)}{|a||b|\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$$

$$=\pm\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\pm Corr(X,Y)$$

i.e. 相關係數的絕對值不受衡量單位變動的影響。

定理 5.12 X,Y *r.vs* . 則 $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$

proof：

$$\forall\, a \in \Re \quad Var(X-aY) = Var(X) + a^2 Var(Y) - 2aCov(X,Y) \geq 0$$

令 $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$

$$\Rightarrow\ Var(X) + \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(Y)} - 2 \cdot \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(Y)} \geq 0$$

$$\Rightarrow\ Var(X) \geq \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(Y)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(X)Var(Y)} \leq 1 \ \Rightarrow\ Cov(X,Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$$ (柯西不等式)

$$\Rightarrow \; Corr(X,Y)^2 \le 1$$

$$\Rightarrow \; -1 \le Corr(X,Y)^2 \le 1$$

***Notes*：**

1. 當$Corr(X,Y) = \pm 1$, X 與 Y 為完全相關 (perfectly correlated)

2. 當$Corr(X,Y) = 0$, X 與 Y 為完全不相關 (uncorrelated)

3. If $Corr(X,Y) > 0 \;\Rightarrow$ X 與 Y 為正相關 (positively correlated)

   If $Corr(X,Y) < 0 \;\Rightarrow$ X 與 Y 為負相關 (negatively correlated)

4. If $Y = aX + b$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,aX+b)}{\sqrt{Var(X)Var(aX+b)}}$$

$$= \frac{aVar(X)}{\sqrt{Var(X)} \cdot |a| \cdot \sqrt{Var(X)}}$$

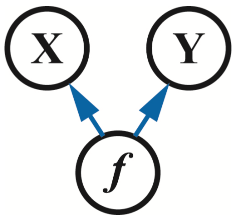
$$= \pm\frac{Var(X)}{Var(X)} = \pm 1$$

i.e. 若兩個 *r.v.*存在線性相關時，必為完全相關。

$$\begin{cases} if\ a > 0 \Rightarrow \text{完全正相關} \\ if\ a < 0 \Rightarrow \text{完全負相關} \end{cases}$$

- 相關係數是衡量 X,Y 的線性關聯度

5. X,Y 存在相關性並不保證存在因果關係。



Ex 5.13 在 Ex 5.9 中。計算 $Corr(X,Y)$

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{0.41}{\sqrt{0.41}\sqrt{1.41}}=0.539$$

Note： X,Y 獨立 $\Rightarrow$ X,Y 必然無關. 但反之不成立.

$$\because\ Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\sum_x\sum_y xyf_{XY}(x,y)-E(X)E(Y)$$

$$=\sum_x\sum_y xyf_X(x)f_Y(y)-E(X)E(Y)$$

$$= \sum_x x f_X(x) \sum_y y f_Y(y) - E(X)E(Y)$$

$$= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

※X,Y 無關但不獨立的例子

令 $X = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & p = \frac{1}{2} \end{cases}$ 令 $Y = X^2$ (X 與 Y 不獨立)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= (1)(1)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (-1)(-1)^2 \cdot \tfrac{1}{2} - 0 = 0$$

∴ 無關但不是獨立.