第五章 雙變量隨機變數

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 5.2 節　離散隨機變數的邊際分配

假設隨機變數 X 與 Y 具有離散的聯合分配。

X 的實現值：$x_1, x_2, x_3, \cdots$

Y 的實現值：$y_1, y_2, y_3, \cdots$

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} \cup \{X = x_i, Y = y_2\} \cdots \cup \{X = x_i, Y = y_m\} \cdots$$

{…} 皆為互斥事件

$$\therefore P(\{X=x_i\}) = P(\{X=x_i, Y=y_1\} \cup \{X=x_i, Y=y_2\} \cup \cdots)$$

$$= P\left(\bigcup_j \{X=x_i, Y=y_j\}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_j \{X=x_i, Y=y_j\}\right)$$

$$= \sum_j P(\{X=x_i, Y=y_j\})$$

$$= \sum_j f_{X,Y}(X=x_i, Y=y_j)$$

同理 $$f_Y(y_j) = \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

另一種符號： The marginal pf of X (Y) is

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y)$$

利用邊際機率，可以算出邊際累積分配函數(marginal cumulative distribution function)

$$\begin{cases} F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{s \le x} f_X(x) = \sum_{s \le x} \sum_{y} f_{X,Y}(x, y) \\ F_Y(y) = P(Y \le y) = \sum_{t \le y} f_Y(Y) = \sum_{t \le y} \sum_{x} f_{X,Y}(x, y) \end{cases}$$

Note：$F_X(x)$ 即是不限制 Y 的可能數值，計算 $\{X \le x\}$ 的機率。

$$i.e. \quad F_X(x) = P(X \le x, Y < \infty)$$

Ex 5.3 Ex 5.1 中 計算 $f_X(x)$

	Y=1	Y=2	Y=3	Y=4	$f_X(x)$
X=1	0.1	0	0	0	0.1
X=2	0.2	0.1	0.2	0	0.5
X=3	0.1	0	0.1	0.2	0.4
$f_Y(y)$	0.4	0.1	0.3	0.2	1

$$f_X(x) = P(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$\therefore \quad f_X(1) = 0.1$$

$$f_X(2) = 0.5$$

$$f_X(3) = 0.4$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

$$\therefore \quad f_Y(1) = 0.4$$

$$f_Y(2) = 0.1$$

$$f_Y(3) = 0.3$$

$$f_Y(4) = 0.2$$

Find $F_X(2) = \sum_{x \le 2} f_X(x) = f_X(1) + f_X(2) = 0.6$

$$F_Y(3) = \sum_{y \le 3} f_Y(y) = f_Y(1) + f_Y(2) + f_Y(3) = 0.8$$

- 若$\forall\, x, y$, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ 則稱 X 與 Y 獨立，否則為相依(dependent)

或是

- 若$\forall\, x,y$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 則稱 X 與 Y 獨立，否則為相依(dependent)

Ex 5.4 Ex 5.3 X 與 Y independent？

$$f_{X,Y}(1,1)=0.1$$

$$f_X(1)=0.1 \quad , \quad f_Y(1)=0.4$$

$$\because \quad f_{X,Y}(1,1)\neq f_X(1)\cdot f_Y(1)$$

$\therefore$ X 與 Y 不獨立