第四章 機率基礎概念

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第4.4節　　連續隨機變數

X 為 $r.v.$, 其累積分配函數 F_X 定義為：

$$\forall \quad x \in \Re, \quad F_X(x) = P\left(X \le x\right)$$

若 F_X 為連續函數(Continuous function)，且除了有限多點以外 F_X 可微，則稱 X 為連續隨機變數(Continuous $r.v.$)。

Note：若 X 為連續隨機變數，則 $P(\{X=x\})=0$

$$\because \quad P(\{y<X\le x\})=P(X\le x)-P(X\le y)$$
$$=F_X(x)-F_X(y)$$

$$\lim_{y\to x} P(\{y<X\le x\})=\lim_{y\to x}[F_X(x)-F_X(y)]$$

（$\because$ F_X 為連續）

$$=F_X(x)-\lim_{y\to x}F_X(y)$$
$$=F_X(x)-F_X(x)=0$$

$\because \quad F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

上式等號成立，必須 X 為連續 *r.v.*

其中 f_X 是 F_X 的導函數

其他課本定義pdf如下

$\Rightarrow \mathrm{F_X}(x) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)dt$

i.e. ： $$\frac{dF_X}{dx} = f_X(x)$$

稱為機率密度函數

(*probability density function*)

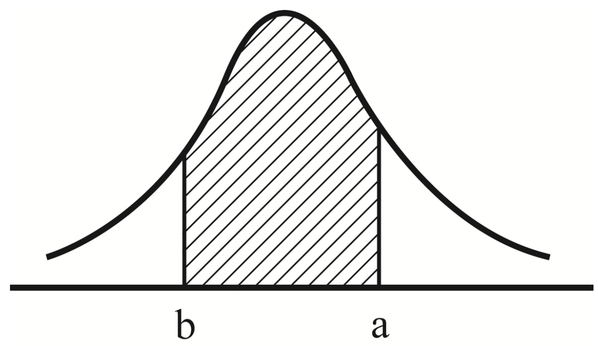
$\therefore$ *pdf* 積分即為 *cdf*, *cdf* 微分即為 *pdf*

計算各種事件的機率可將 pdf 將在某區域積分即可。

Ex $P(b \le X \le a) = P(b < X \le a) = P(X \le a) - P(X \le b)$

$$= F_X(a) - F_X(b) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(t)dt$$



i.e. pdf 在 $[b,a]$ 範圍內所形成的面積。

機率密度函數的性質：

1. $f_X(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \Re$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

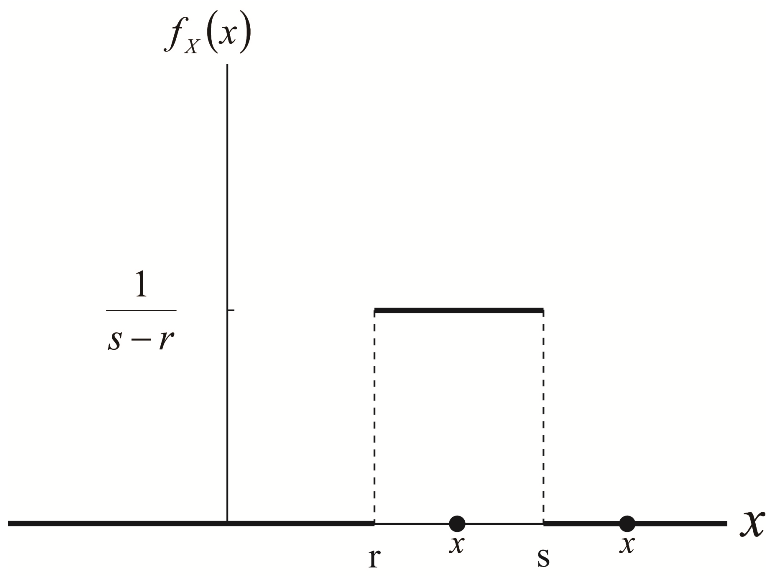
Ex 4.12 從區間 $[r,s]$ 抽取一點所形成之 *r.v.* X，其 *pdf* 為

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{s-r} & r\le x\le s\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

i.e. $X \sim U(r,s)$

其 *cdf* 為？

$\Rightarrow$



The *cdf* of X is: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad \forall x \in \Re.$

$$if \quad x \le r \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0(t)\,dt = 0$$

$$if \quad r < x \le s \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{r} 0\,dt + \int_{r}^{x} \frac{1}{s-r}\,dt$$

$$= \frac{1}{s-r}(x-r)$$

$$if \quad x > s \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{r} 0\,dt + \int_{r}^{s} \frac{1}{s-r}\,dt + \int_{s}^{x} 0\,dt$$

$$= \frac{1}{s-r}(s-r) = 1$$

$$\therefore \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \le r \\ \dfrac{x-r}{s-r} & if \quad r < x \le s \\ 1 & if \quad x > s \end{cases}$$