第四章 機率基礎概念

授課教師：欉清全

國立暨南國際大學經濟學系

第 4.2 節　離散隨機變數的動差

***Note*:** 累積分配函數 or 機率函數是對隨機變數隨機機制完整的描述。而動差 (Moment) 則是刻畫隨機變數部分特性。

第 4.2.1 節　期望值

令 $f_X(x)$ 代表 discrete　*r.v.* 的機率函數。E 代表期望運算 (Expected operator) 則 $E(X)$ 稱為 *r.v.* X 的均數 (mean) or 期望值 (expected value) 定義如下：

$$\mu \equiv E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x p(X = x)$$

***Notes*：**

1. $E(X)$ 是所有實現值的加權平均，其權數為各實現值之機率。以 μ 表示。
2. $E(X)$ 為一實數，不具有隨機性。

定理 4.4 X is a $r.v$, $a, b \in \Re$

$$\Rightarrow E(aX+b) = aE(X)+b$$

proof：

$$E(aX+b) = \sum_x (ax+b) f_X(x)$$

$$= \sum_x \left[ax \cdot f_X(x) + b \cdot f_X(x)\right]$$

$$= a\sum_x x \cdot f_X(x) + b\sum_x f_X(x)$$

$$= aE(X)+b$$

***Notes*：**

1. 定理 4.4 表示線性函數與E順序可以互換。

   i.e. 令 $g(X)=aX+b$

   則 定理 4.4$\Rightarrow E(g(X))=E(aX+b)=aE(X)+b$

   $$=g(E(X))$$

2. 若g為非線性函數，則

   $$E(g(X))\neq g(E(X))$$

   ex. $E\left(\dfrac{1}{X}\right)\neq\dfrac{1}{E(X)}$

   $$E|X|\neq|E(X)|$$

   $$E(X^r)\neq(E(X))^r$$

Ex 4.5 以 Ex 4.1 為例 (P.76)

$$E(X_1)=\sum_x x f_{X_1}(x)=1\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+2\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+\cdots+6\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)=\tfrac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=3.5$$

$$E(X_2)=\sum_x x f_{X_2}(x)=6\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+7\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+\cdots+11\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)=\tfrac{1}{6}(6+7+\cdots+11)=8.5$$

$$\because X_2=X_1+5$$

$$\Rightarrow E(X_2)=E(X_1)+5=3.5+5=8.5$$

$$E(X_3)=\sum_x x f_{X_3}(x)=5\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+10\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)+\cdots+30\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)=\tfrac{1}{6}(5+10+\cdots+30)=17.5$$

$$\because X_3=5X_1$$

$$\Rightarrow E(X_3)=5E(X_1)=5\cdot(3.5)=17.5$$

第 4.2.2 節 變異數

$$E\left(X^{2}\right)=\sum_{x} x^{2} f_{X}(x)=\sum_{x} x^{2} p(X=x)$$

上式為 *r.v.* X 的二階動差。用以描述 X 實現值的變異性。

Ex. 4.6

r.v. X_1 :

x	**-2**	**2**
f_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E\left(X_1^{\,2}\right) = \sum_{x_1} x_1^{\,2} f_{X_1}(x_1) = (-2)^2 \cdot 1/2 + 2^2 \cdot 1/2 = 4$$

r.v. X_2 :

x	**-2**	**4**
f_{X_2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E\left(X_2^{\,2}\right) = (-2)^2 \cdot 1/2 + 4^2 \cdot 1/2 = 10$$

Note：利用 $E\left(X^2\right)$ 衡量 *r.v.* X 的變異性有其缺點：*i.e.* $E\left(X^2\right)$會隨 *r.v.* 的位置改變。

Ex 4.7 在 Ex 4.6 中 X_1。定義 $X_3 = X_1 + 2$

x_3	**0**	**4**
f_{X_3}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\therefore E\left({X_3}^2\right) = 0^2 \cdot {}^1\!/_2 + 4^2 \cdot {}^1\!/_2 = 8$$

此時X_1，X_3有相同變異，但$E\left(X_3{}^2\right)=8>4=E\left(X_1{}^2\right)$

$\because \quad E\left(X-E(X)\right)=E(X)-E(X)=0$

任何一個 *r.v.*扣除其 mean 的均數必為零。

$\therefore \quad X-E(X)$的變異不受位置(均數)的影響。

$\therefore$一般而言 以

$E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\sum_x (x-\mu)^2 f_X(x)$衡量 *r.v.* X 的變異程度。

上式稱為第二階中央動差(second central moment) or 變異數(variance)。同常以σ^2 or $Var(X)$表示。而其平方根，σ 表示標準差

(standard deviation)。

Note：(公式 4.8)

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left(X^2\right) - \mu^2$$
$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\because \quad Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$
$$= E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= E\left(X^2\right) - \mu^2$$
$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

定理 4.9 X is a $r.v.$, a, $b \in \Re$

$$\Rightarrow \quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

proof：

令 $Z = aX + b$ ， $\mu_Z = E(aX+b) = a\mu_X + b$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right] = E\left[(aX+b-[a\mu_X+b])^2\right] \\ &= E\left[(a(X-\mu_X))^2\right] = E\left[a^2(X-\mu_X)^2\right] \\ &= a^2 E\left[(X-\mu_X)^2\right] \end{aligned}$$

Ex 4.10 在 Ex 4.7 中 $X_3 = X_1 + 2$

利用定理 4.9 $Var(X_3) = Var(X_1 + 2) = Var(X_1)$

x	**-2**	**2**
f_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\mu_1 = E(X_1) = 0, \quad Var(X_1) = E\left(X_1^{\ 2}\right) - \left(E(X_1)\right)^2 = 4$$

依據定義：

x_3	**0**	**4**
f_{X_3}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\mu_3 = E(X_3) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 2$$

$$Var(X_3) = E\left(X_3{}^2\right) - \mu_3{}^2 = 0^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{2} - 2^2$$

$$= 8 - 4 = 4$$

計算 Ex 4.6 中 X_2 的 variance

x	**-2**	**4**
f_{X_2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X_2) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1 + 2 = 1$$

$$E\left(X_2{}^2\right) = (-2)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{2} = 2 + 8 = 10$$

$$Var(X_2) = E(X_2{}^2) - (E(X_2))^2 = 10 - 1 = 9$$

$$\therefore Var(X_2) > Var(X_1)$$ 合乎直覺!

Notes：

1. X is a $r.v.$ 令$\mu_X = E(X)$，$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

   則 $Z \equiv \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ 其$E(Z) = 0$，$Var(Z) = 1$

2. 上述程序稱為標準化 (standardization)