# 第三章 機率基礎概念

授課教師：欉清全

國立暨南國際大學經濟學系

# 第 3.4 節　條件機率

條件機率: 已知 event $B$ 發生之下，event $A$ 發生的機率稱為條件機率(conditional probability)，以 $P(A|B)$ 表示。

***Note***：$P(A)$ 稱為非條件(unconditional)機率。

※ 若 $P(A|B) = P(A) \quad or \quad P(B|A) = P(B)$

則稱 $A, B$ 互相獨立(independent)。

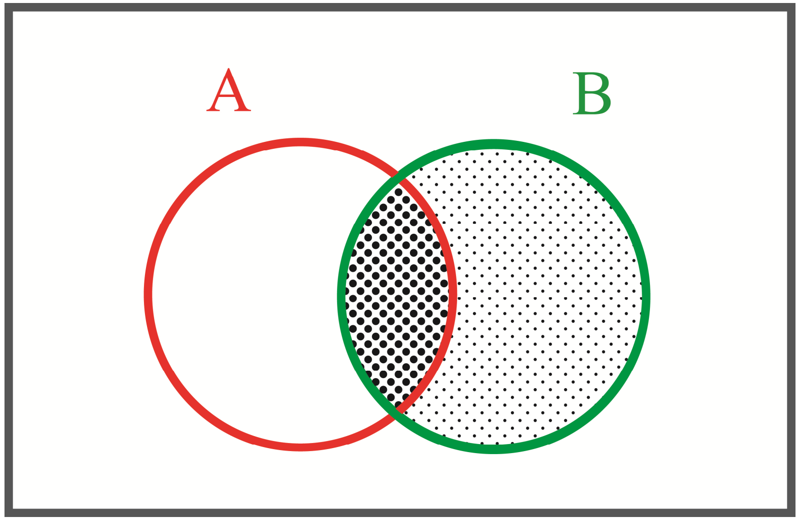
否則 則稱 $A, B$ 兩事件相依(dependent)。

**Ex 3.11:** 某一trail有10個outcome，$A$包含4種outcome，$B$有6種outcome，$A\cap B$有兩種outcome。

$$\Rightarrow \quad P(A)=\tfrac{4}{10}, \quad P(B)=\tfrac{6}{10}, \quad P(A\cap B)=\tfrac{2}{10}$$

$P(A|B)=P($已知$B$已經發生下，$A$發生$)$

$$=\frac{\overbrace{2}^{\text{在B內且A發生}}}{\underbrace{6}_{\text{限定於B的}\,outcome}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



同理，$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2/10}{4/10}$

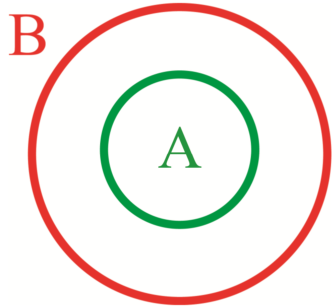
***Note***：比例中，$P(A|B)=1/3\neq P(A)=4/10$，

$\therefore A,B$ 為相依事件。

**公式 3.15:** $A,B\subseteq\Omega$ ，則

(a) $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$

(b) 若 $A$, $B$ 獨立，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$




**Ex：** 若 $A\subseteq B$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A\cap B)}_{\substack{\Updownarrow \\ P(A)}}=P(B\mid A)\cdot P(A)$$

$$\Rightarrow P(A)\left[P(B|A)-1\right]=0 \qquad \Rightarrow \quad P(B|A)=1$$

此時$B$一定發生(別忘了，$A\subseteq B$), $A$ 發生，$B$ 一定發生。

又 $\underbrace{P(A\cap B)}_{\substack{\Updownarrow \\ P(A)}} = P(A|B)\cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} < 1,$ $B$發生，$A$ 未必發生。

**Ex 3.16：** 擲一骰子，$A=\{2\}$，$B=\{1,2,3\}$

$\Rightarrow A\subseteq B$

$\Rightarrow P(B|A)=1$ （$A$發生，$B$一定發生）

而 $P(A|B) = 1/3 \neq 1/6 = P(A),$ $\therefore A, B$相依.

**Ex 3.17：** 52張樸克牌中，抽一張

$A \equiv \{抽到K, Q, J\}$

$B \equiv \{抽到紅心\}$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \tfrac{3}{13}$$

$$P(B) = \tfrac{13}{52} = \tfrac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \tfrac{3}{52} = \tfrac{3}{13} \cdot \tfrac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

$\therefore A, B$ 互為獨立事件。

***Note***： $A, B$ 互為獨立，且 $P(A) \& P(B) > 0$, 並不表示 $A \cap B = \phi$（互斥）。

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$ ($\because$ $A, B$ 獨立)

$\Rightarrow A \cap B \neq \phi$

*i.e.* 若 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$, $A \& B$ 不可能同時為獨立事件與互斥事件。

同理，$P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)\cdot P(B|C)\cdot P(C)$

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B\cap C) &= P(C|A\cap B)\cdot P(A\cap B)\\
&= P(C|A\cap B)\cdot P(A|B)\cdot P(B)\\
&= P(C|A\cap B)\cdot P(B|A)\cdot P(A)
\end{aligned}
$$

假設　$P(A) \neq 0$，$P(B) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$而 B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^C)$$

$$= \underbrace{(B \cap A)}_{互斥} \cup \underbrace{(B \cap A^C)}_{互斥}$$

$$\therefore P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

$$= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)$$

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)}$$

上式為 簡單貝氏定理(Bayes theorem)

或者 $$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B)+P(A|B^C)\cdot P(B^C)}$$

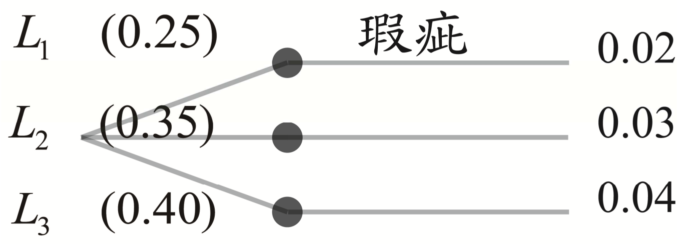
## 定理 3.19: (貝氏定理)

若$A_1, A_2, \cdots A_n$ 為互斥事件 且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

則對$A_i$ , $i = 1,2,\cdots n$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)}$$

## Ex 3.20:



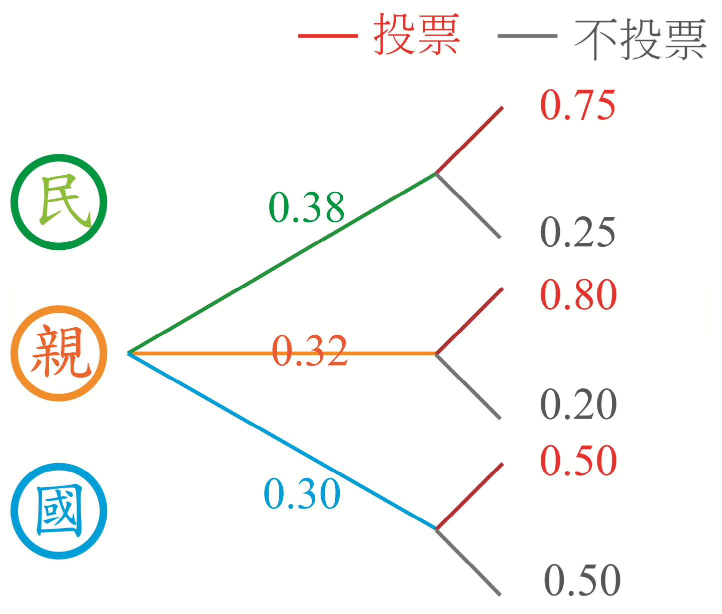
$$P\left(L_1\text{生產}\middle|\text{瑕疵品}\right)=\frac{P\left(\text{瑕疵品}\middle|L_1\right)P(L_1)}{P\left(\text{瑕疵品}\middle|L_1\right)P\left(L_1\right)+P\left(\text{瑕疵品}\middle|L_2\right)P\left(L_2\right)+P\left(\text{瑕疵品}\middle|L_3\right)P\left(L_3\right)}$$

$$=\frac{0.02\times0.25}{0.02\times0.25+0.03\times0.35+0.04\times0.40}$$

同理，

$$P\left(L_3\text{生產}\middle|\text{瑕疵品}\right)=\frac{0.04\times0.40}{0.02\times0.25+0.03\times0.35+0.04\times0.40}$$

**Ex 3.21:**




$$P(\text{支持民進黨}|\text{未投票})=\frac{P(\text{未}|\text{民})\cdot P(\text{民})}{P(\text{未}|\text{民})\cdot P(\text{民})+P(\text{未}|\text{親})\cdot P(\text{親})+P(\text{未}|\text{國})\cdot P(\text{國})}$$

$$=\frac{0.25\times0.38}{0.25\times0.38+0.20\times0.32+0.5\times0.30}$$

# 更多例子：

**Ex 1(例1.7):** 兩組警報器A, B. 若發生火災，A有95%機率可偵測出；B有98%機率可偵測出。兩警報同時偵測出的機率為94%。

(1) 發生火災時，至少有一警報器偵測出的機率為何？

(2) 發生火災時，$A$偵測出但$B$未偵測出之機率？

$$\Rightarrow \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.95+0.98-0.94=0.99$$

$$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=0.95-0.94=0.01$$

**Note:** $A=\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A\cap B\right)$

$$\Rightarrow P\left(A\right)=P\left(A\cap B^C\right)+P\left(A\cap B\right)$$

**Ex 2(例1.8)**

$A$，$B$ 兩人皆選修計量經濟學，$A$ 有80%機率會去上課，$B$ 有60%機率會去上課，兩人缺席互為獨立。某一天至少有一人會去上計量的機率為何？

$E_A : A$上課的事件

$E_B : B$上課的事件

$$P(E_A \cup E_B) = P(E_A) + P(E_B) - P(E_A \cap E_B)$$
$$= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6 = 0.92$$

（ $\because P(E_A \cap E_B) = P(E_A) \cdot P(E_B)$ （互為獨立））

**Ex 3(例1.16)**

$A, B \subseteq \Omega$ 證明: $P(A \cap B) \geq 1 - P(A^C) - P(B^C)$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= (1 - P(A^C)) + (1 - P(B^C)) - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A^C) - P(B^C) + (1 - P(A \cup B))$$

$$\therefore P(A \cap B) \geq 1 - P(A^C) - P(B^C)$$

**Ex 4(例1.21)**

$A, B, C \subseteq \Omega \quad , C \subset B \subset A. \quad$ 假設$P(B) > 0$

證明: $P(C|B) \geq P(C|A)$

$$\Rightarrow \quad P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)_{小}}$$

$$P(C|\mathrm{A}) = \frac{P(C \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(C)}{P(\mathrm{A})_{大}}$$

$$\because C \subset B \subset A \quad \Rightarrow \quad P(B) \leq P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(C|B) \geq P(C|A)$$

**Ex 5(例2.2)**

擲一骰子兩次(考慮順序)，觀察點數。

1. 列出此實驗樣本空間。

$\Rightarrow$

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{Bmatrix}$$

令 $\omega \in S,\quad P(\{\omega\})=1/36$

2. $A=\{$點數和至少為10$\}$,　$B=\{$點數差的絕對值為3$\}$

$C=\{$任一次出現5點$\}$,　求$P(A)$, $P(B)$ 與 $P(C)$

$$\Rightarrow \quad A=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$\therefore P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$B=\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}$$

$$\therefore P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$C=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$$

$$\therefore P(C)=\frac{11}{36}$$

3. 求$P(A\cap B), P(A\cap C), P(B\cap C)$，其中何者為互斥事件? 何者為獨立事件?

$\Rightarrow A\cap B=\phi \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B)=0$ $\qquad A, B$為互斥事件

$$A\cap C=\{(5,5),(5,6),(6,5)\} \quad \Rightarrow \quad P(A\cap C)=\frac{3}{36}$$

$$B\cap C=\{(2,5),(5,2)\} \quad \Rightarrow \quad P(B\cap C)=\frac{2}{36}$$

沒有獨立事件，$\because P(A\cap C)\neq P(A)\cdot P(C)$

**Ex 6(例2.4)** $A, B \subseteq \Omega$，何者為真?

1. $P(A \cap B) \le P(B)$
2. 若 $P(A \cap B) < P(B) < 1 \Rightarrow P(A|B) > P(A \cap B)$
3. 若 $A \cap B = \phi$，則 $P(A \cap B) = P(B)$

(1) $\Rightarrow \because \quad A \cap B \subseteq B \qquad \Rightarrow P(A \cap B) \le P(B)$

(2) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \because P(B) < 1 \qquad \Rightarrow P\left(A \middle| B\right) > P(A \cap B)$

(3) $P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \ne P(B)$

**Ex 7(例2.7)** 若$A$ , $B$獨立，試證明：1. $A^C, B$獨立　2. $A, B^C$獨立

3. $A^C, B^C$獨立。

1.

$$
\begin{aligned}
P\left(A^C \cap B\right) &= P\left(A^C \middle| B\right) \cdot P(B) \\
&= \left[1 - P(A|B)\right] \cdot P(B) = P(B) - P(A|B) \cdot P(B) \\
&= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\
&= P(B)(1 - P(A)) = P(B) \cdot P\left(A^C\right)
\end{aligned}
$$

2.

$$P\left(A \cap B^C\right) = P\left(B^C \middle| A\right) \cdot P(A) = \left(1 - P\left(B \middle| A\right)\right) \cdot P(A)$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B|A) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P\left(B^C\right)$$

3.

$$P\left(A^C \cap B^C\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P\left(A^C\right) \cdot P\left(B^C\right)$$

**Ex 8(例2.12)** $A, B \subseteq \Omega$, $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(A \cup B) = 1/2$

,計算 1. $P(A^C \cup B^C)$ 2. $P(A|B)$ 3. $P(A|B^C)$ 4. $P(A \cap B^C)$

1.

$$P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 + (P(A \cup B) - P(A) - P(B))$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

2.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$$

3.

$$P\left(A \cap B^C\right) = P\left(B^C \middle| A\right) \cdot P(A) = \left(1 - P\left(B \middle| A\right)\right) \cdot P(A)$$

$$= \left(1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\right) \cdot P(A)$$

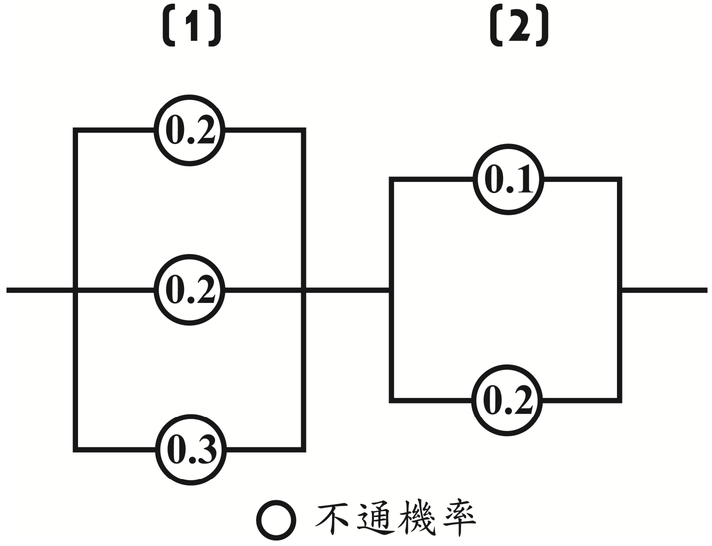
$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$$

4.

$$P\left(A \mid B^C\right) = \frac{P\left(A \cap B^C\right)}{P\left(B^C\right)} = \frac{3/12}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

**Ex 9(例3.3)** 一體系如右：

該體系可以正常運作的機率




$$P\big((1)\text{至少有一個可以正常運作}\big)$$

$$=1-P(\text{全部無法運作})$$

$$=1-0.2\times0.2\times0.3=0.988$$

$$P\big((2)\text{至少有一個可以正常運作}\big)$$

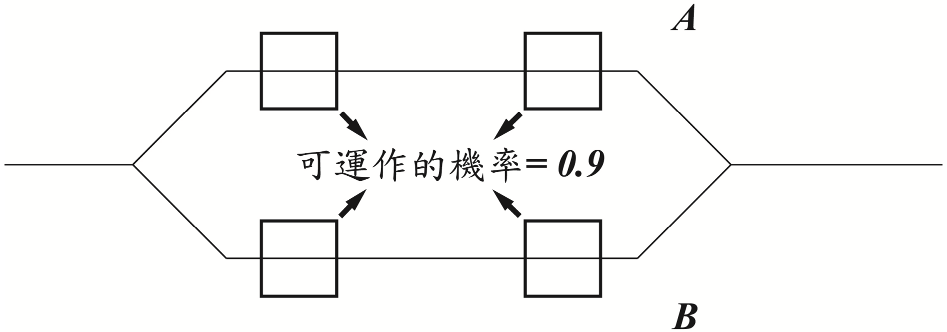
$$=1-P(\text{全部無法運作})$$

$$=1-0.1\times0.2=0.98$$

$$P(1\cap 2)=P(1\text{可}\ \&\ 2\text{可})=0.988\times0.98$$

## Ex 10(例3.5)

(1)　整個可運作的機率？




$A$：可運作的機率$=(0.9)^2$

$B$：可運作的機率$=(0.9)^2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (0.9)^2 + (0.9)^2 - (0.9)^4$$

(2)　可運作機率達0.99，$P = ?$

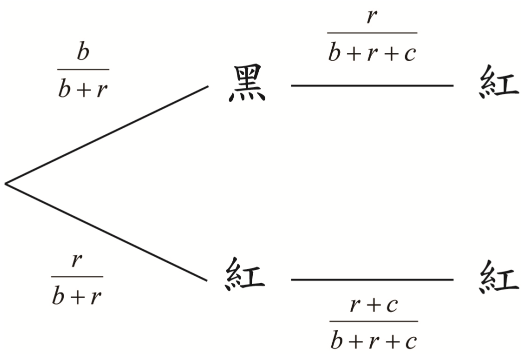
$$P^2 + P^2 - P^4 = 0.99$$

解 ***P***

$$P = 0.9487$$

**Ex 11(例4.2)** 1個box中有$b$個黑球，$r$個紅球，依序抽出兩球，當放回該球時，另放入$c$個同色球。

（1） 第2個球為紅色球的機率為何

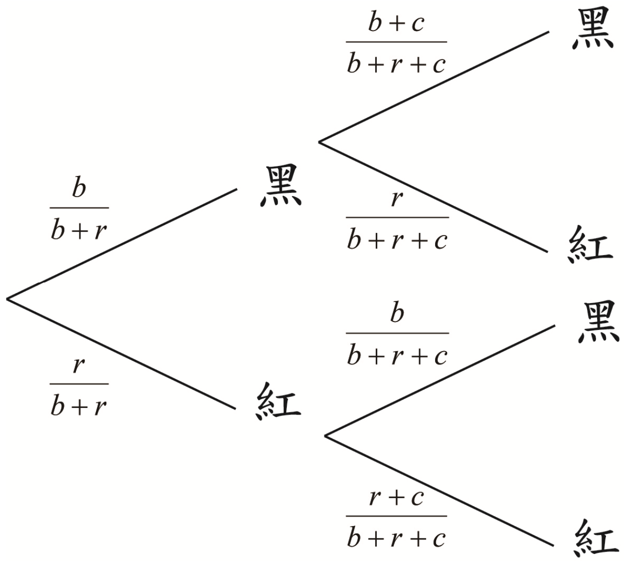



$$\therefore \text{機率} = \left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r}{b+r+c}\right) + \left(\frac{r}{b+r}\right)\left(\frac{r+c}{b+r+c}\right)$$

$$= \frac{br + r^2 + rc}{(b+r)(b+r+c)} = \frac{r(b+r+c)}{(b+r)(b+r+c)}$$

$$= \frac{r}{b+r}$$

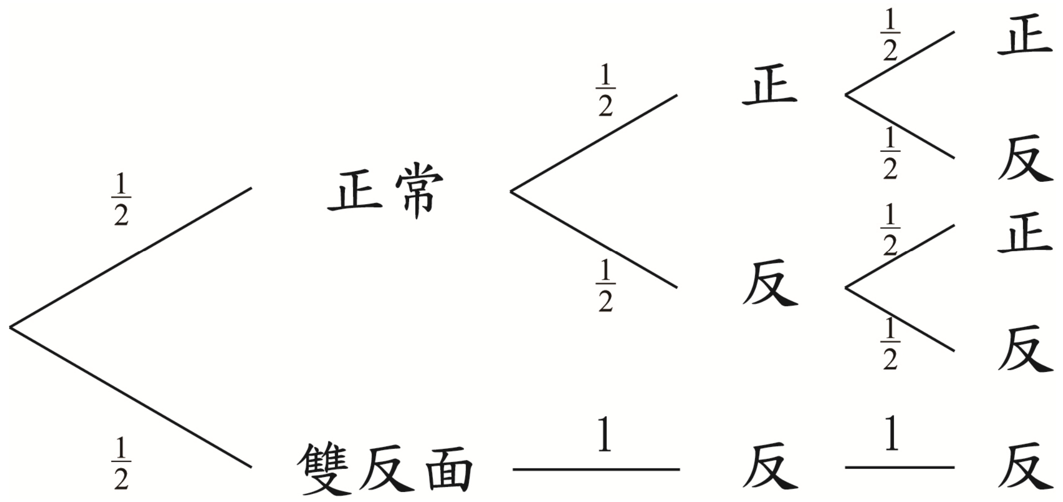
(2) 給定第2個是紅色球之下，第1個是黑球的機率？




$$\frac{\frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+c}}{\frac{r}{b+r}}=\frac{b}{b+r+c}$$

**Ex 12(例4.5)** 1. 某生有2個銅板，一個為正反兩面，另一個全部反面，隨機取一個銅板投擲，結果為反面，此為正常銅版機率？

$\Rightarrow$

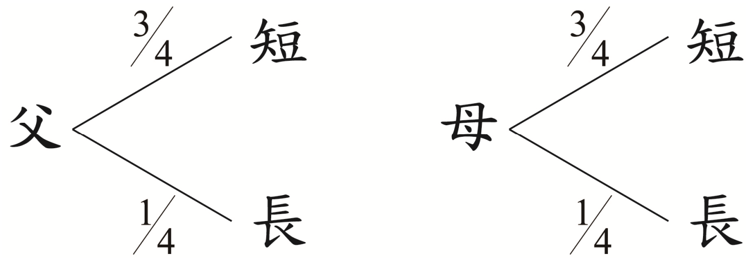



$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=\frac{1}{3}$$

2.假設投擲該銅版第2次，又為反面(第1&2次皆為反面)，此為公平銅板機率為何？

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{4}{8}}=\frac{1}{5}$$

**Ex 13(例4.6)** 實驗鼠有長短毛兩種，公的有$\frac{3}{4}$短毛，$\frac{1}{4}$長毛，母的亦同。已知(長, 長)必為長毛，(短，短)有$\frac{7}{9}$為短毛，(長, 短)有$\frac{3}{5}$為短毛。取一公一母配對，生下長毛，其父母為一長一短之機率？




（父, 母)=（長, 長），（長，短），（短, 長），（短，短)皆可能生出長毛。

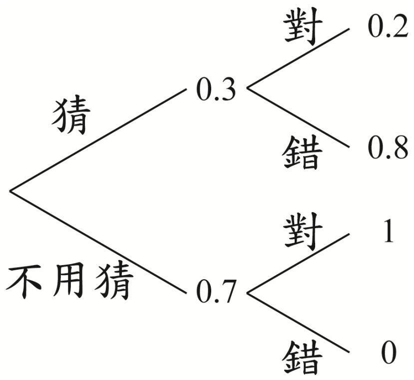
$$機率=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}}$$

**Ex 14(例4.8)** 某生回答一個複選題，有5個選項，只有一個正確答案。該生有70%的機率會正確回答該題目，若該生不會則猜測答案。

1. 該生回答正確的機率？

$$0.7\times 1+0.3\times {}^{1}\!/_{5}=0.76$$

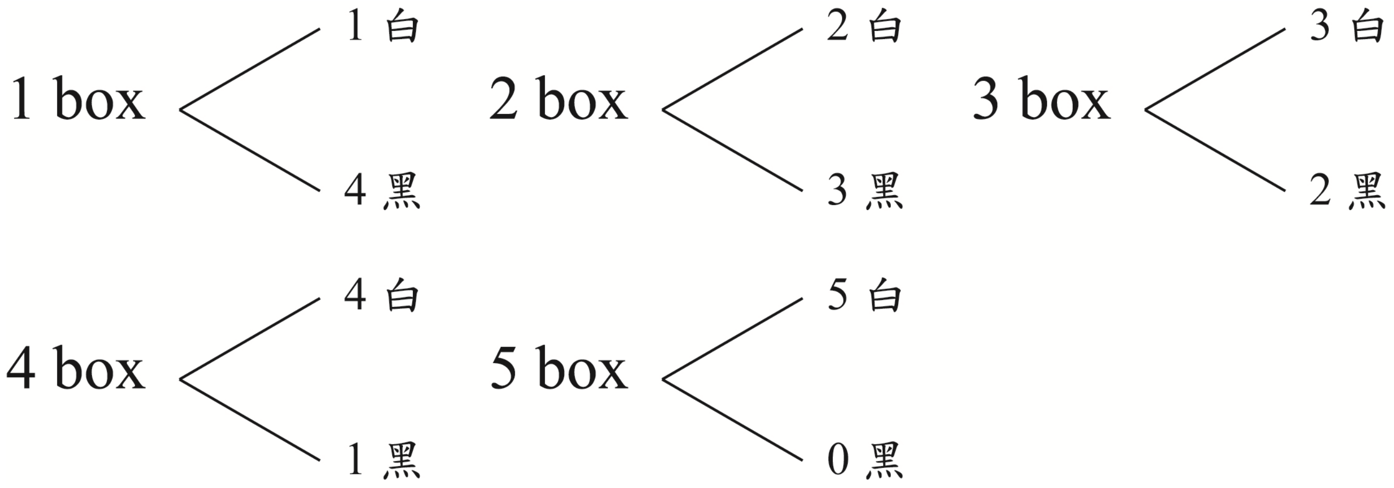
2. 若該生回答正確，它確定不是亂猜的機率。




$$\frac{0.7\times 1}{0.2\times 0.3+0.7\times 1}=\frac{0.7}{0.76}=0.9211$$

**Ex 15(例4.11)** 有5個box第$i$個box有$i$個白球$5-i$個黑球。隨機取一個box，再從該box取兩球。

1. 兩球皆為黑球的機率？



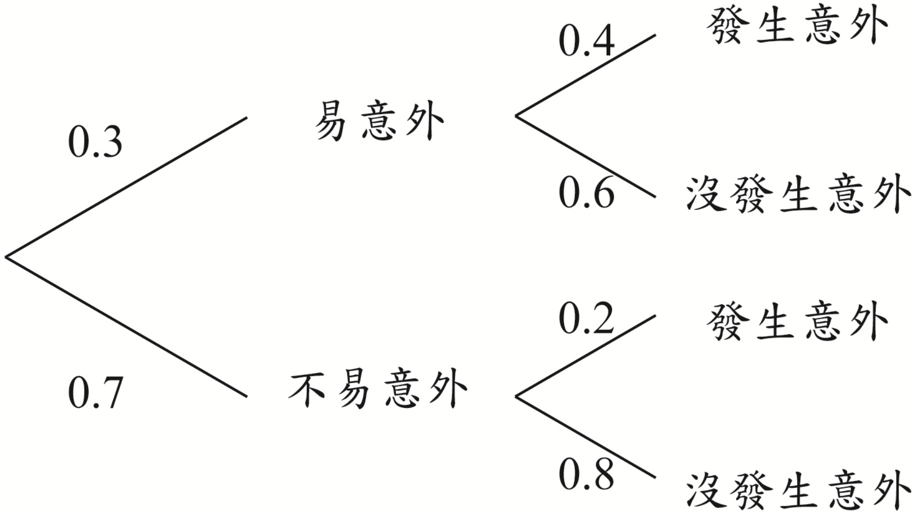

$$\frac{1}{5}\times\frac{C_2^4}{C_2^5}+\frac{1}{5}\times\frac{C_2^3}{C_2^5}+\frac{1}{5}\times\frac{C_2^2}{C_2^5}+\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times 0=\frac{1}{5}$$

2.若兩球皆為黑球，由box2抽出機率為何？

$$\frac{\frac{1}{5}\times\frac{C_2^3}{C_2^5}}{\frac{1}{5}}=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10}$$

**Ex 16(例4.21)** 某保險公司將保險人分為兩類，第1類(占30%)易發生意外，第2類不易發生意外。第1類中發生意外的機率為0.4；第2類中發生意外的機率為0.2。

1. 保險人發生意外的機率為何？




該機率$=0.3\times0.4+0.7\times0.2=0.26$

2. 若某人發生意外，此人為易發生意外的機率為何？

$$=\frac{0.3\times 0.4}{0.26}=\frac{6}{13}$$