第三章 機率基礎概念

授課教師：欉清全
國立暨南國際大學經濟學系

第 3.3 節 計次法則

假設一個樣本空間 Ω 有 n 個出象 $w_1, w_2, \cdots w_n$.

$\Rightarrow \Omega = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cdots \cup \{w_n\}$ 且 $\{w_1\}, \{w_2\}, \cdots \{w_n\}$ 為互斥事件

$$\Rightarrow P(\Omega) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) \cdots + P(\{w_n\}).$$

若這些出象的發生機率均等,

$$\Rightarrow 1 = n \cdot P(\{w_n\})$$

$$\Rightarrow P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} \qquad \forall i = 1, 2, \cdots n.$$

Ex： 擲一個公平的骰子，有 6 個出象，機會均等

$\Rightarrow$ 出現每個點數的機率皆為$\dfrac{1}{6}$

計算各種 event 的機率

Ex：擲一個公平的骰子，令 $A \equiv \{2,3,4\}$ $\quad P(A) = ?$

$\Rightarrow A = \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$

$$\Rightarrow P(A) = P(\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\})$$

$$= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

另外一種想法：

A有 3 個出象，占可能出象的$\frac{1}{2}$

∵每種 outcome 機率均等

$$P(A)=\frac{A\text{出象數目}}{\text{所有出象個數}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

計算某事件 or 樣本空間所有出象的總數：

計次法則 (Counting Rule)

※ 計次法則－乘積法則 (Product Rule)

若一個隨機試驗包含一系列的步驟 (step) or 試行 (trail)

⇒該隨機試驗的所有可能出象總數為每一 step or trail 的 outcome 數目乘積

Ex： 擲一個骰子兩次，則有 2 個 step, 每個 step 有 6 種可能性

$\therefore$ 該 random experiment 有 $6\times 6 = 36$ 種可能出象;

i. e. $(1,1), (1,2), \cdots, (1,6)$

$(2,1), (2,2), \cdots, (2,6)$

$\vdots$

$(6,1), (6,2), \cdots, (6,6)$.

Ex：假設有 n 個產品,每一個產品檢查有 2 種情況: 合格與不合格。

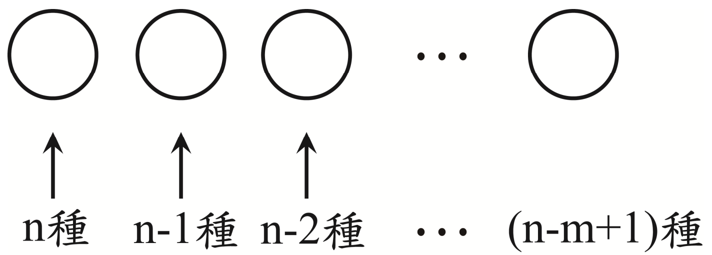
$\therefore$ 整個檢查共有 $\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n個} = 2^n$ 種情況。

排列(Permutation)

※ 若有 n 個物件排列順序則有：

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$種情況。

※ 將 n 個物件排列於 m 個位置：



$\therefore$共有$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = P_m^n$種可能性

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

組合(Combination)

不考慮排列順序選取物件的方式。

Ex： 甲，乙，丙三人

(甲,乙,丙)，(甲,丙,乙)，

(乙,甲,丙)，(乙,丙,甲)，

(丙,甲,乙)，(丙,乙,甲)

皆視為相同組合

$$\frac{3!}{3!}=1$$

同理, 由 n 取 m 的組合方式，有 m! 排列方式，視為同一種組合。

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_{n-m}^n$$

※ $$(a+b)^n = C_0^n a^0 b^n + C_1^n a^1 b^{n-1} + C_2^n a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

稱為二項式係數

公式 3.10: (a) 有 n 個物件排列於 m 個位置共有

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!} \quad or \quad C_m^n \cdot m!$$

(b) n 個物件取 m 個組合方式

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ex 3.11: 50 人中前 3 名共有幾種排列方法？

$\Rightarrow$

$$C_3^{50} \cdot 3!$$

若不論排名，則共有C_3^{50}種可能。

Ex 3.12: 有 m 個人，$2 \leq m \leq 365$，至少 2 人生於同月同日的機率為何？

$$1-\frac{C_m^{365} m!}{365^m}$$

$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-m+1) = P_m^{365}$

沒有2個人生日同一天

Ex 3.13: 20 個廠址，8 個國內，12 個國外，想建 6 個工廠，恰 2 間為國內廠的機率？

$$\frac{C_2^8 C_4^{12}}{C_6^{20}}$$

恰 6 間為國內廠的機率？

$$\frac{C_6^8 C_0^{12}}{C_6^{20}}$$