第三章 機率基礎概念

授課教師：欉清全

國立暨南國際大學經濟學系

第 3.1 節　出象空間與事件

基本概念：

1. 隨機試驗(random experiment）：

試驗的結果無法事前預知。

任何一種結果不確定的事件稱之。

e.g. ：丟銅板、投擲兩顆骰子、明日股市收盤價。

2. 出象(outcome):

隨機試驗的結果稱之。

e.g. ：丟一個銅板，其結果為正面、丟兩顆骰子其結果為 (1,5)、

股市收盤指數為 8120點。

3. 出象(樣本)空間(outcome / sample space)：

所有可能的出象所形成的集合。以 Ω 表示。

e.g. ：丟一個銅板樣本空間為

$\Omega=\{H,T\}$。

丟一顆骰子樣本空間為

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

4. 樣本點(sample point)：

每一個出象稱之。以 ω 表示。

e.g. ：H or T。

5. 隨機事件(random event)／事件(event)：

不同出象所形成的子集合(subset)稱之。此樣本空間的 Ω 子集合。i.e. $A \subseteq \Omega$, A 為event。

若 $A=\{\omega\}$，只包含一個出象，則稱 A 為單一事件(singleton)。

Ex 3.1：丟一顆骰子樣本空間為？

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,3\}$，$B=\{4,5,6\}$ 分別為事件。

$C=\{5\}$ 為單一事件。

若出現的點數為1，稱 A 事件發生。

若出現的點數為5，稱 B 與 C 事件發生。

Ex 3.2：一個品管的樣本空間為

Ω＝{合格、不合格}

Ex 3.3：一個投資計畫的樣本空間

Ω＝{所有可能的利潤}

A＝{利潤大於0} 是一個事件

B＝{利潤等於0}是一個單一事件

集合的運算

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

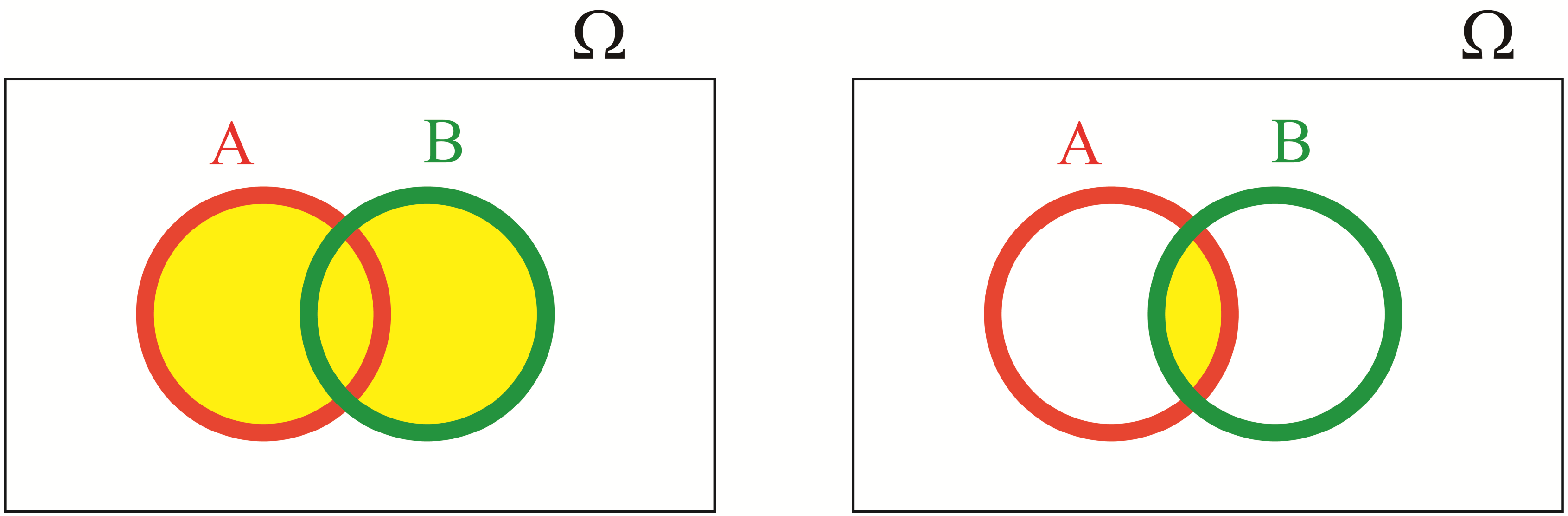
$\Downarrow$

A與B的聯集(union)

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$

$\Downarrow$

A與B的交集(intersection)



范氏圖 (Venn diagram)

定理3.4:

假設 A, B, C 為同一樣本空間 Ω 的3個事件

1. **滿足交換律(commutative law)**

   $A \cup B = B \cup A$ ； $A \cap B = B \cap A$

2. **滿足結合律(associative law)**

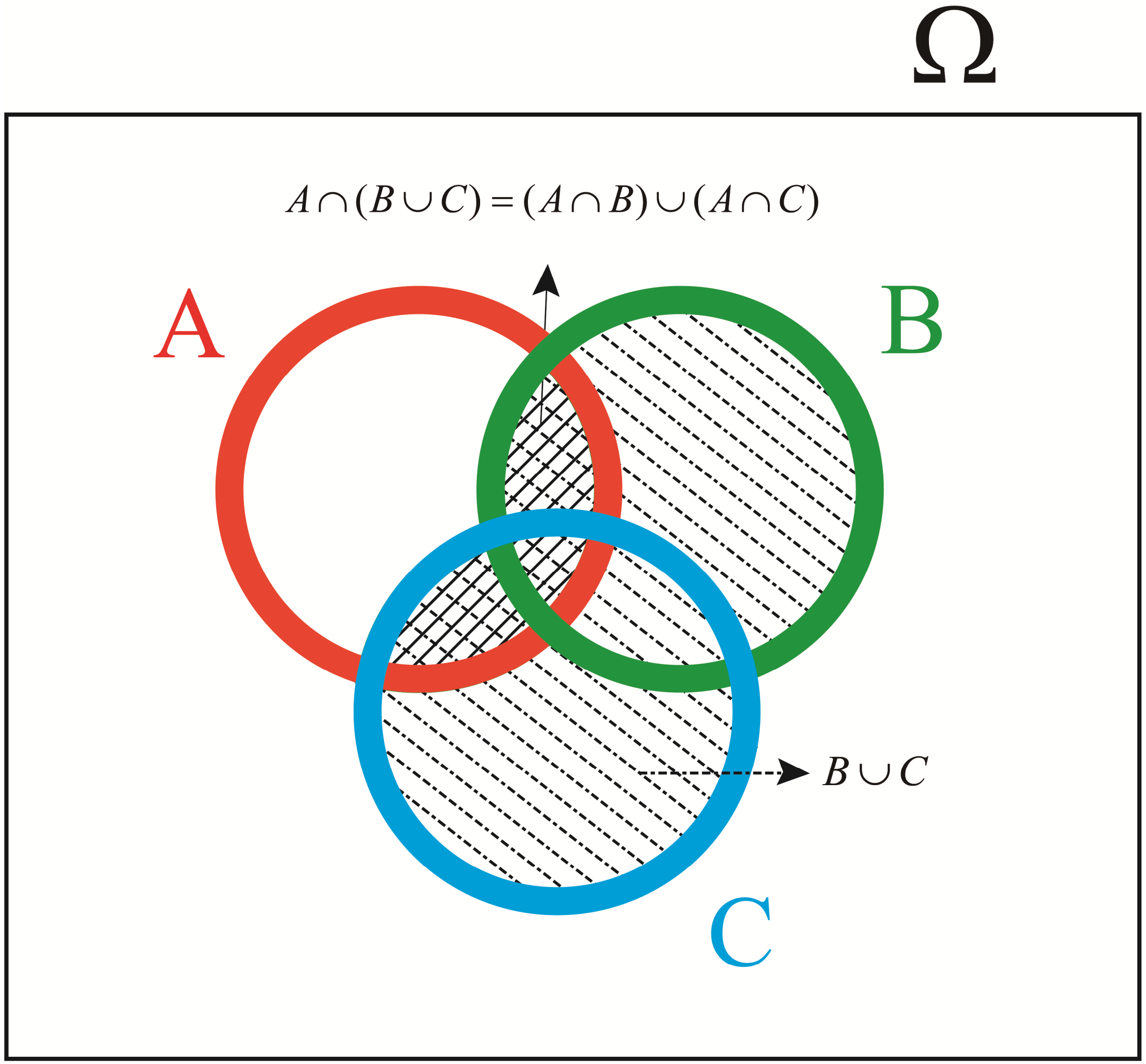
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

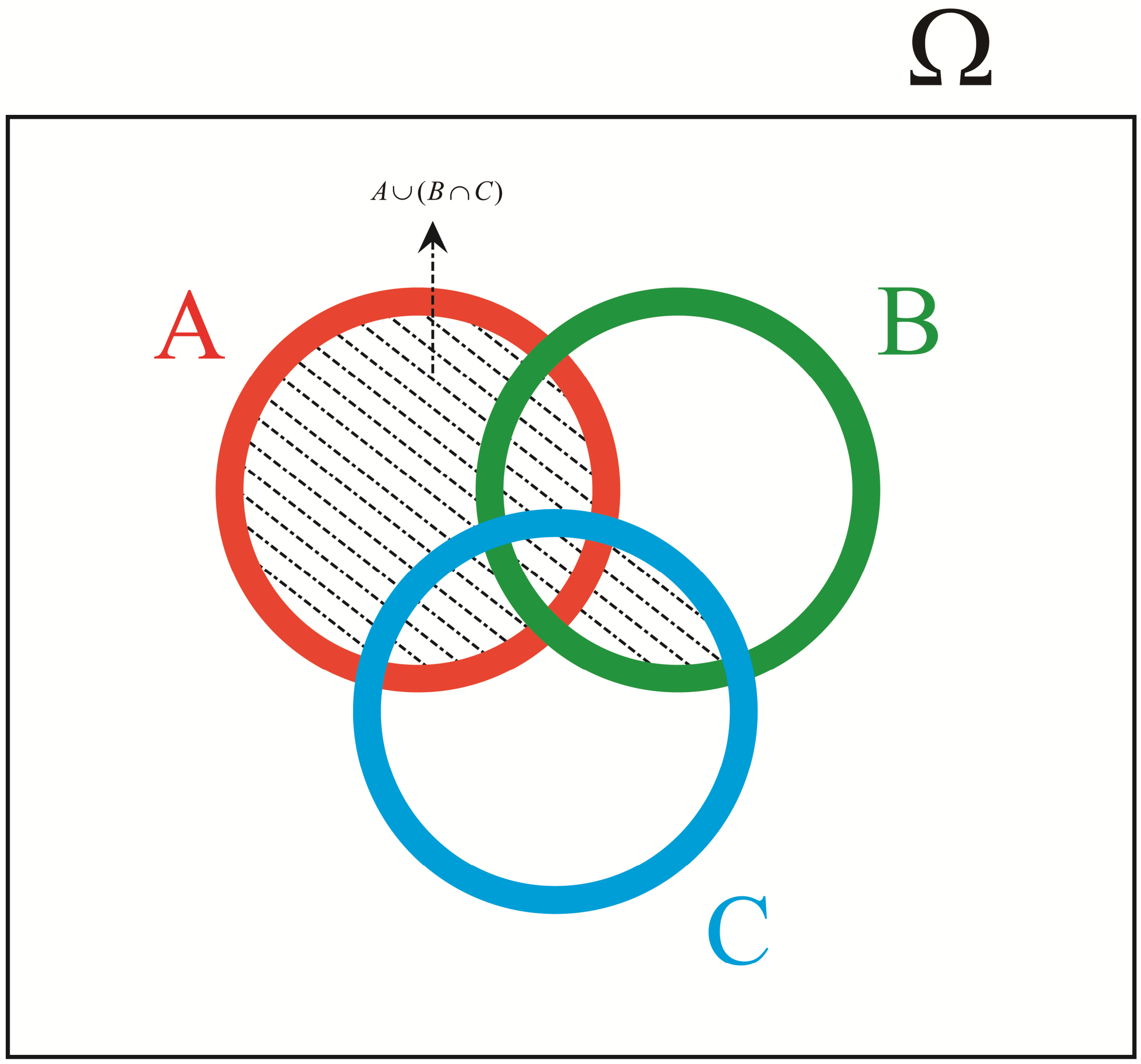
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **滿足分配律(distributive law)**

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$


Ω
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
A
B
C
$B \cup C$



Ω
$A \cup (B \cap C)$
A
B
C

Ex 3.5: (From Ex 3.1)

$A=\{1,2\}, \quad B=\{2,4,6\}, \quad C=\{2,3,4\}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\cup B=\{1,2,4,6\}=B\cup A \\ A\cap B=\{2\}=B\cap A \end{array}\right\} \text{符合交換律}$$

$B\cup C=\{2,3,4,6\}$

$B\cap C=\{2,4\}$

$$\begin{aligned} A\cup(B\cup C) &= \{1,2\}\cup\{2,3,4,6\}=\{1,2,3,4,6\} \\ &= \{1,2,4,6\}\cup\{2,3,4\} \\ &= (A\cup B)\cup C \end{aligned}$$

$A\cap(B\cap C)=\{1,2\}\cap\{2,4\}=\{2\}$

$(A\cap B)\cap C=\{2\}\cap\{2,3,4\}=\{2\}$

$\therefore A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $\therefore$ 滿足結合律

$$A\cap(B\cup C)=\{1,2\}\cap\{2,3,4,6\}=\{2\}$$

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2\}\cup\{2\}=\{2\}$$

$$\therefore A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

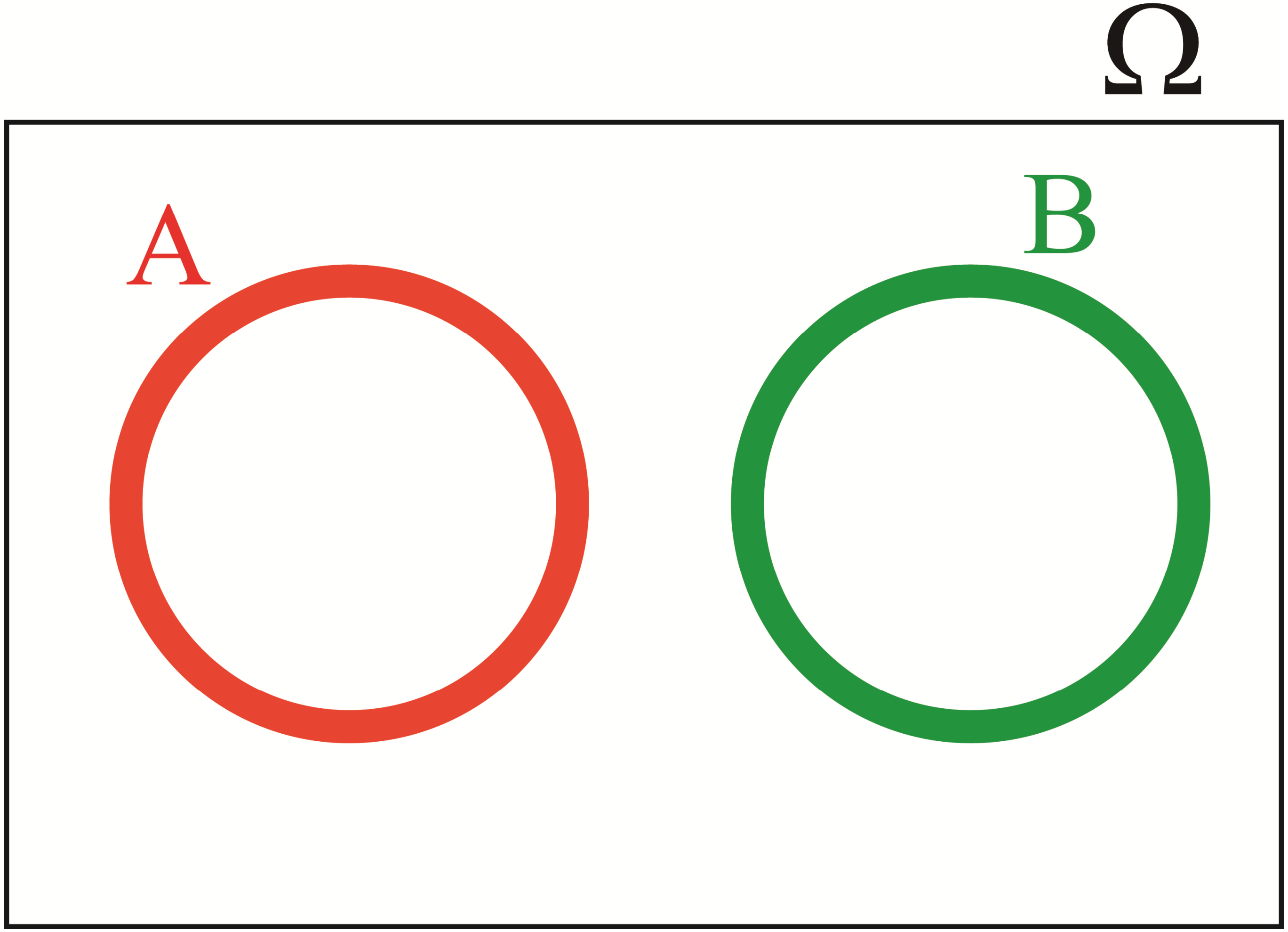
$$A\cup(B\cap C)=\{1,2\}\cup\{2,4\}=\{1,2,4\}$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,4,6\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,4\}$$

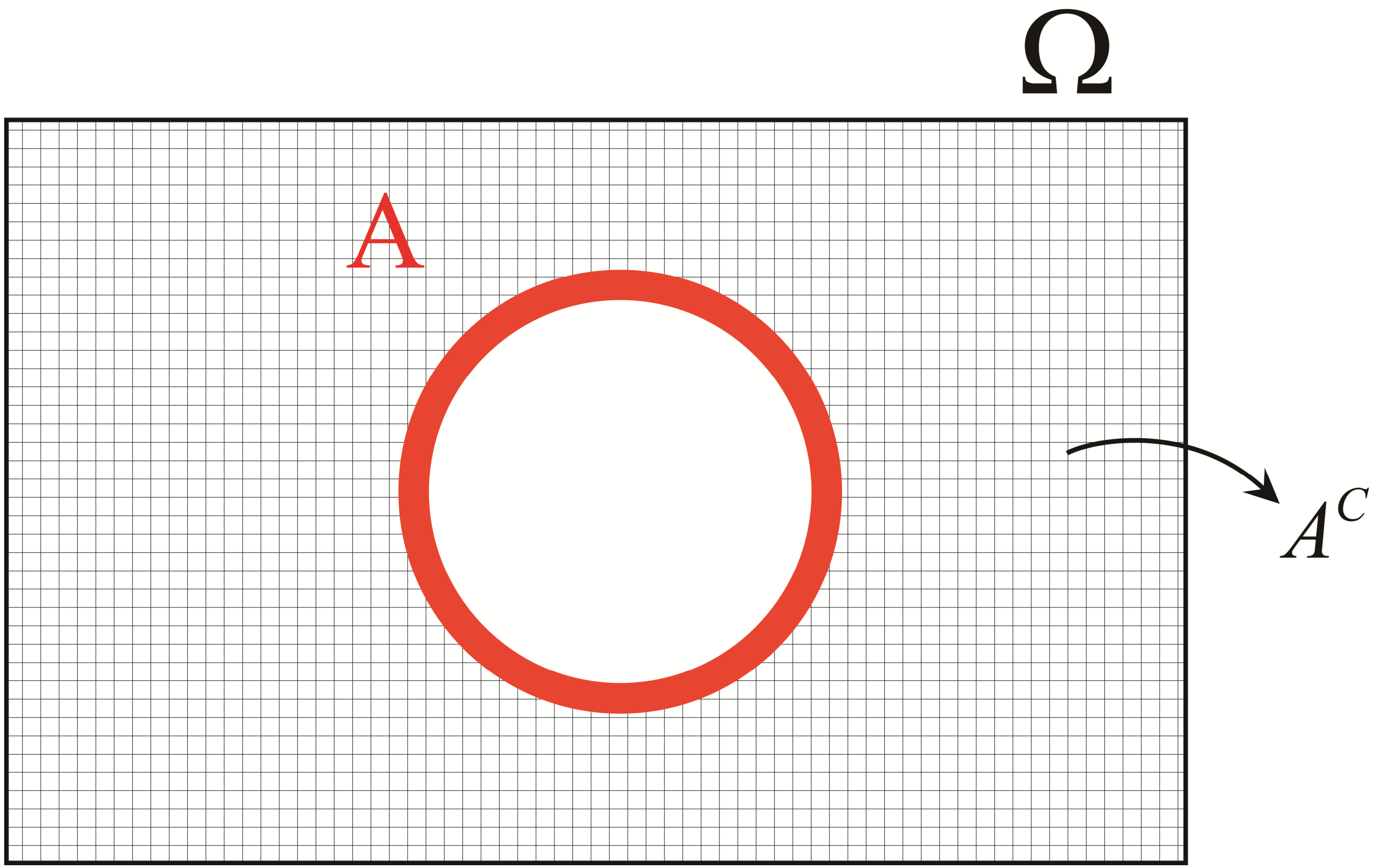
$$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

∴滿足分配律

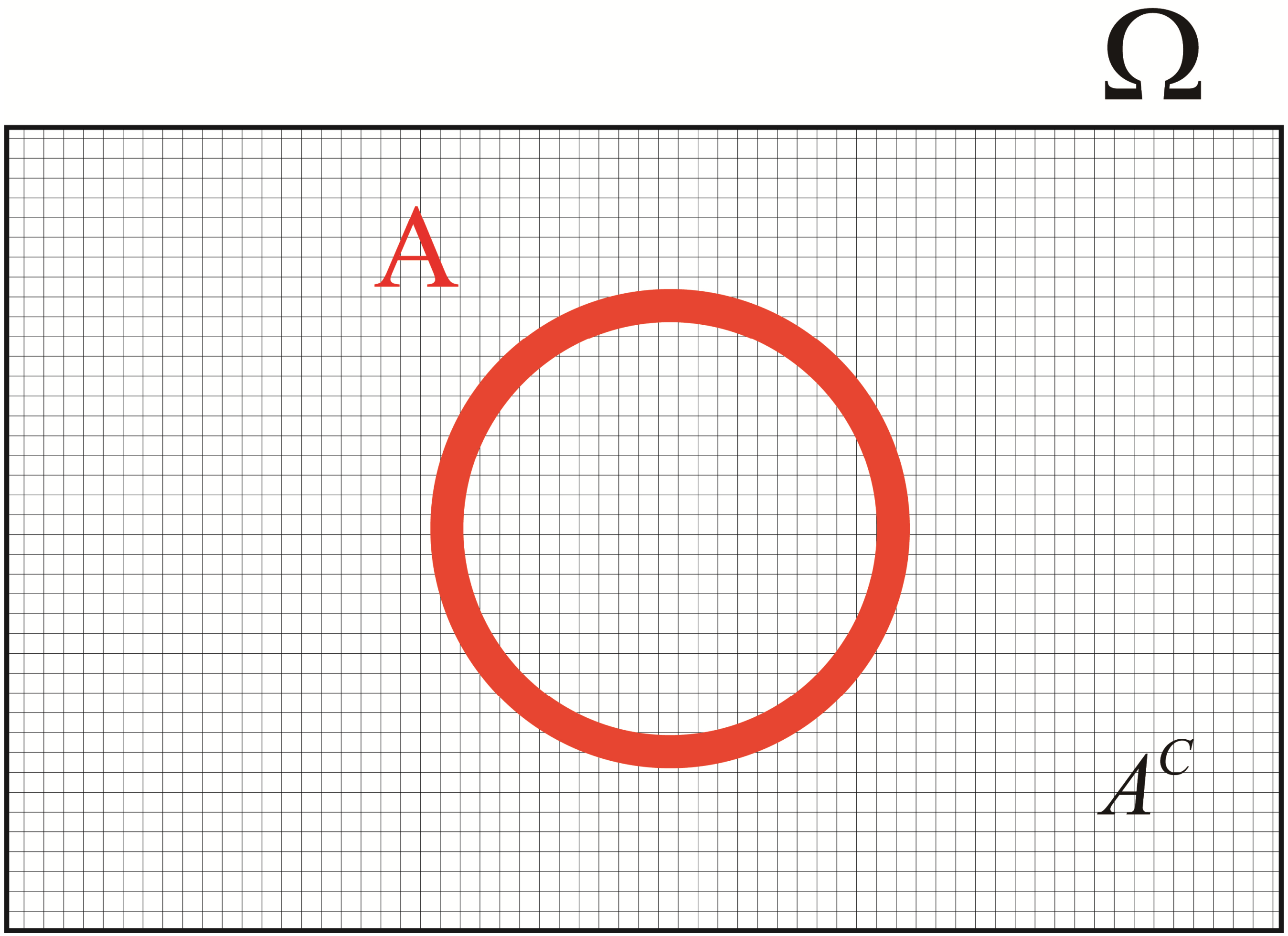
※ 若 $A \cap B = \phi$ 則稱 A, B 為互斥事件(mutually exclusive events).



※ A 的補集(complement)，$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$



Note: $A \cap A^C = \phi$ $\therefore A$ 與 A^C 為互斥事件，且 $A \cup A^C = \Omega$.



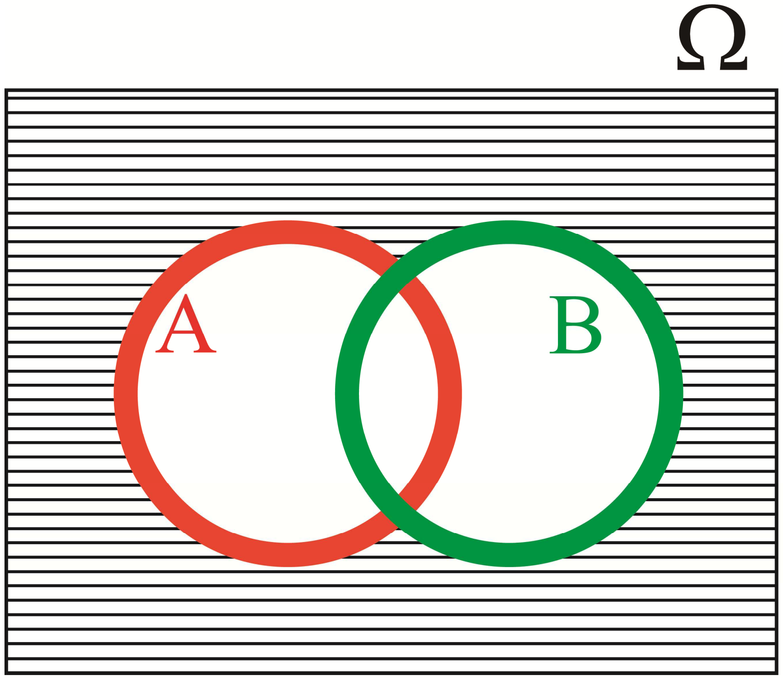
定理3.6：迪摩根定律(De Morgan's Law)

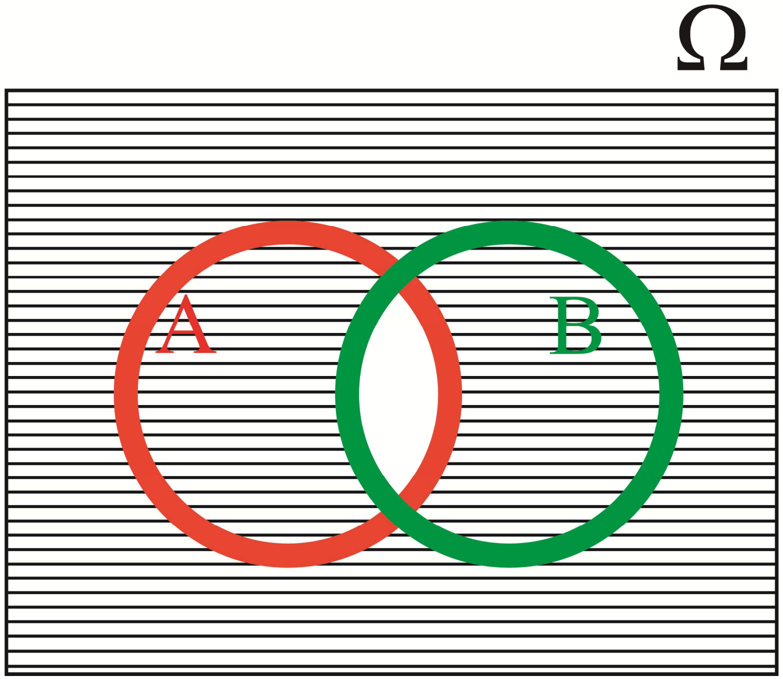
若 $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$

則

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$





Note: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ and $B \subseteq A$.

$(\Rightarrow)$

假設 $\omega \in (A \cup B)^c \quad \Rightarrow \quad \omega \in \Omega$ 且 $\omega \notin A \cup B$

$\Rightarrow \quad \omega \notin A \;\; \& \;\; \omega \notin B$

$\Rightarrow \quad \omega \in A^c$ 且 $\omega \in B^c$

$\Rightarrow \quad \omega \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow \; (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \qquad ---(1)$

$(\Leftarrow)$

假設$\omega \in A^C \cap B^C \Rightarrow \quad \omega \in A^C$ 且 $\omega \in B^C$

$\Rightarrow \quad \omega \notin A$ 且 $\omega \notin B$

$\Rightarrow \quad \omega \in (A \cup B)^C$

$$\Rightarrow \quad A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C \quad ---(2)$$

由(1)&(2)知 $\quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Ex 3.7: 令 $A = \{1,2\}$, $B = \{2,4,6\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$\Rightarrow \quad A^C = \{3,4,5,6\} \quad B^C = \{1,3,5\}$$

$$A \cup B = \{1,2,4,6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$(A \cup B)^C = \{3,5\}$$

$$A^C \cap B^C = \{3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{3,5\}$$

$$\therefore (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = \{1,3,4,5,6\}$$

$$A^C \cup B^C = \{3,4,5,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5,6\}$$

$$\therefore\ (A \cap B)^C = A^c \cup B^c$$